Untersuchungen über symmetrische Geradenkomplexe

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

genehmigt von der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin

von

Walter Jung
aus Oberbiel bei Wetzlar

Tag der Promotion: 22. 2. 1937
Tag der mündlichen Prüfung: 20. 1. 1937

Gießen 1937

Buchdruckerei Heinz Meyer • Gießen • Ludwigstraße 30

923

Untersuchungen über symmetrische Geradenkomplexe

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

genehmigt von der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin

von

Walter Jung
aus Oberbiel bei Wetzlar

Tag der Promotion: 22. 2. 1937
Tag der mündlichen Prüfung: 20. 1. 1937

Gießen 1937

Buchdruckerei Heinz Meyer • Gießen • Ludwigstraße 30

Referenten:

Dozent Dr. W. Weber
Professor Dr. Bieberbach

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Inhalt:

I. Einleitung.
II. Inhomogene irreduzible Komplexe.
III. Anwendungen in der Konfigurationstheorie.
IV. Untersuchungen über die Lage der Schnittpunkte und die Zerlegung der projektiven Ebene.
V. Anhang.

Es werden im folgenden zitiert unter:

I) (S.G.I.) die in „[illegible] ang (1936), Heft 2, Seite 239—255) ersc[illegible]id mir verfaßte Arbeit: „Symmetrische

II) (S.G.II.) die g[illegible] door E. Melchior. (Erscheint als Phil. Diss. d[illegible]

N°.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41535726_0088

I. Einleitung.

In (S. G. I.) war der symmetrische Geradenkomplex (n, k) als ein System von n verschiedenen Geraden der projektiven Ebene, die sich so schneiden, daß jede Gerade mit genau k verschiedenen Schnittpunkten inzident ist, definiert worden. Diese Definition ist identisch mit folgender: Ein Geradenkomplex sei symmetrisch, wenn die Charakteristiken seiner Geraden derselben Klasse angehören. Dabei gibt die Charakteristik $(a_1, \ldots, a_s)$ einer Geraden g an, wieviel Geraden durch die mit g inzidenten Kreuzungspunkte $P_1, \ldots, P_s$ des Komplexes gehen — Kreuzungspunkt soll ein Schnittpunkt heißen, wenn mehr als zwei Geraden ihn passieren —, während unter „Klasse" die Zahl $c = \sum_{r=1}^{s} (a_r - 2)$ verstanden ist, wobei wie bekannt auch $c = n - k - 1$ ist ((S. G. I.) Seite 244, Satz 4). Die dann gestellte Aufgabe, sämtliche symmetrischen Komplexe zu konstruieren, ist nun für die (n, k) mit nur einer Charakteristik — homogene Komplexe — insoweit gelöst worden: Es wurden zunächst alle (n, k) der Charakteristiken $\chi_1 = (a_1)$, $\chi_2 = (a_1, a_2)$ angegeben. Die Lösungsmenge von $\chi_1 = (a_1)$ ist $a_1 \cdot x$ $(x = 1, 2, 3, \ldots)$; die von $\chi_2 = (a_1, a_2)$ dagegen hat die Gestalt:

(1) $\binom{a+1}{2} + \frac{a}{2}x$ bzw. $\binom{a+1}{2} + ax$, wenn $a_1 = a_2 = a$,

andernfalls

(2) $$a_1 \cdot a_2 + M \cdot x \quad (x = 0, 1, \ldots)$$

— M kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches von a_1 und a_2 —

((S. G. I.) Seite 253 und 255, Satz 20 bzw. 21). Außerdem wurde noch gefunden: Es gibt ein (n, k) mit $\binom{a+s-1}{s}$ Geraden und der Charakteristik $(a, \ldots, a)$ (s-mal), bzw. ein (n, k) mit $pm^2 \cdot \binom{r}{2}$ Geraden und der Charakteristik $\chi = (3, \ldots, 3, pm^2)$ ((r−1)-mal). Also:

$$(3) \qquad \begin{aligned} n &= \binom{a+s-1}{s}, & \chi &= (a, \ldots, a) \quad (s\text{-mal}) \\ n &= pm^2 \cdot \binom{r}{2}, & \chi &= (3, \ldots, 3, pm^2) \quad ((r-1)\text{-mal}). \end{aligned}$$

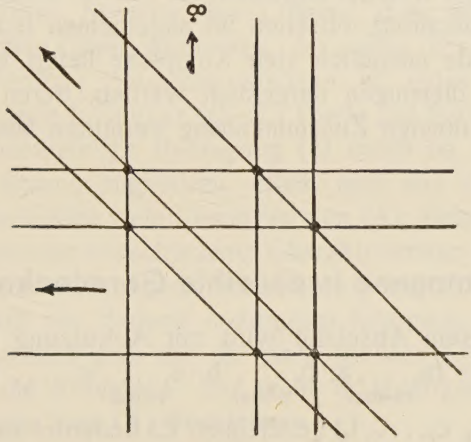
Alle anderen symmetrischen Komplexe wurden dann aus diesen kombiniert mittels

I. einer Addition in der Ebene: Mit (n, k) $\chi_1, \ldots, \chi_m$ bzw. (n_1, k_1) und $\chi'_1, \ldots, \chi'_r$ ((n, k) und (n_1, k_1) in derselben Klasse) existiert auch $(n, k) + (n_1, k_1) = (n + n_1, n + k_1)$ mit den Charakteristiken $\chi_1, \ldots, \chi_m, \chi'_1, \ldots, \chi'_r$ ((S. G. I.) Seite 245) und

II. einer Parallelverschiebung ((S. G. I.) Seite 250), die in (S. G. II.) zu einer räumlichen Multiplikation erweitert wird: Mit (n, k) und $\chi_1, \ldots, \chi_m$ bzw. (n_1, k_1) und $\chi'_1, \ldots, \chi'_r$ existiert auch $(n, k) \times (n_1, k_1) = (n \cdot n_1, k_2)$ mit $\chi''_1 = (\chi_1, \chi'_1), \ldots, \chi''_{r \cdot m} = (\chi_m, \chi'_r)$ (alle Kombinationen (χ_μ, χ'_ν) $(\mu = 1, \ldots, m;$ $\nu = 1, \ldots, r)$.

Infolge des symmetrischen Baues der Formeln (1) und (2) und der beide Konstruktionsmethoden verbindenden Relation $(n, k) \times ((n_1, k_1) + (n_2, k_2)) = (n, k) \times (n_1, k_1) + (n, k) \times (n_2, k_2)$ erhält man für die Lösungsmengen verhältnismäßig leicht zu überblickende Ausdrücke, deren Übersicht nur durch die Asymmetrie der Formeln (1), (2) und (3) für Charakteristiken mit gleichen Gliedern und solche, die die Zahl 3 enthalten, einerseits und Charakteristiken mit verschiedenen Gliedern andererseits gestört wird. Es zeigt sich aber, daß man so nur zu einem Teil der symmetrischen Komplexe gelangt. Insbesondere erhält man im allgemeinen keine irreduziblen Geradensysteme, d. h. Komplexe, die nicht mittels der Addition

als Summe anderer Geradenkomplexe dargestellt werden können; denn die Summe zweier (n, k) ist schon nach Definition reduzibel. Aber auch für das Produkt zweier irreduzibler Komplexe läßt sich die Irreduzibilität nur unter besonderen Bedingungen – teilerfremde Charakteristiken usw. – behaupten. Das zeigen schon einfache Beispiele. Z. B. existieren für die Charakteristiken $\chi_1 = (3)$ und $\chi_2 = (3, 3)$ die irreduziblen (3, 1) bzw. (6, 3), (9, 6) ((S. G. I.) Seite 249 unten). Figur 1 zeigt den (9, 5) mit $\chi_3 = (3, 3, 3)$.



Figur 1
(9, 5)
Charakteristik (3, 3, 3)

Nun ist $(3,1) \times (3,1) \times (3,1) \times (3,1) = (3,1)^4 = (81, k)$ und $(9,5) \times (6,3) = (54, k_1)$. Beide haben die Charakteristik (3, 3, 3, 3). Es ist aber auch $(9, 5) \times (3, 1) = (27, k_2)$ ein Komplex mit $\chi_3 = (3, 3, 3, 3)$. Weiter hat man $(27, k_2) + (27, k_2) + (27, k_2) = (81, k) = (3, 1)^4$ und $(27, k_2) + (27, k_2) = (54, k_1)$, da auf beiden Seiten die gleiche Geradenzahl und gleiche Charakteristik ist ((S. G. I.) Seite 243, Satz 2). Es ist also weder $(3, 1)^4$ noch $(6,3) \times (9,6)$ irreduzibel. Aber auch $(9,5) \times (3,1) = (27, k_2)$ ist noch nicht der „kleinste" Komplex mit (3, 3, 3, 3).

Es zeigt sich jedoch, daß gerade die irreduziblen Komplexe die topologisch interessantesten Systeme sind, da hier auf verhältnismäßig wenig Geraden eine große Anzahl höherwertiger Kreuzungspunkte liegen (s. a. Seite 19). Bei ihnen wird durch n Geraden die projektive Ebene in eine Mindestzahl von Bereichen zerlegt (Seite 33).

Es konnte eine große Menge Konstruktionsmethoden irreduzibler Geradenkomplexe gefunden werden. Da aber jede nur irreduzible (n, k) liefert, ist die Tragweite einer solchen Methode viel weniger allgemein als die der obigen (Addition und Multiplikation), obschon im allgemeinen jede Konstruktionsmethode unendlich viele Komplexe liefert. Im folgenden sollen nur diejenigen dargestellt werden, deren Ergebnisse einen allgemeinen Zusammenhang vermuten lassen.

II. Inhomogene irreduzible Geradenkomplexe.

In diesem Abschnitt wird zur Abkürzung die Charakteristik $\chi = (\underset{\text{m-mal}}{a, \ldots, a}, \underset{\text{n-mal}}{b, \ldots, b}, \underset{\text{r-mal}}{c, \ldots, c}, \ldots, \underset{\text{t-mal}}{l, \ldots, l})$ mit $\chi = (a_m, b_n, c_r, \ldots, l_t)$ bezeichnet. Es bedeutet also der untere Index m, daß das betreffende Element in der Charakteristik m-mal vorkommt. Insbesondere wird für eine Charakteristik χ mit s gleichen Gliedern $\chi = (a_s)$ gesetzt. Für eine Charakteristik mit differenten Elementen wird dann die Bezeichnung $(a_1, \ldots, a_r)$ vermieden und an ihrer Stelle $(a^{(1)}, \ldots, a^{(r)})$ geschrieben.

Es handelt sich im folgenden um die Übertragung des Begriffes „Lösungsmenge“ auf die inhomogenen Systeme. In der ersten Arbeit war jeder homogene Geradenkomplex, der die Charakteristik $(a^{(1)}, \ldots, a^{(s)})$ besitzt, als „Lösung“ dieser Charakteristik bezeichnet worden. Betrachten wir nun folgendes System von Charakteristiken:

$$
\begin{aligned}
&\chi_1 = (a^{(1,1)}, \ldots, a^{(1,r_1)}),\\
&\chi_2 = (a^{(2,1)}, \ldots, a^{(2,r_2)}),\\
(A)\quad &\chi_3 = (a^{(3,1)}, \ldots, a^{(3,r_3)}), \qquad (m \geq 2)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\chi_m = (a^{(m,1)}, \ldots, a^{(m,r_m)})
\end{aligned}
$$

mit

$$
(4)\qquad \sum_{\rho=1}^{r_\mu} (a^{(\mu,\rho)} - 2) = c \qquad (\mu = 1, \ldots, m).
$$

Hat dieses System eine Lösung, d. h. gibt es einen symmetrischen Geradenkomplex, der genau diese m Charakteristiken besitzt? Zunächst existieren für jedes χ_ρ beliebig viele homogene Lösungen ((S. G. I.) Seite 252, Satz 15). Sobald dann die notwendige Bedingung (4) erfüllt ist, also alle χ_ρ derselben Klasse angehören, erhält man aus diesen durch Addition unendlich viele Lösungen von (A). Dabei schneiden sich die Geraden verschiedener Charakteristiken in einfachen Punkten. Diese Lösungen interessieren hier nicht, da ihre Konstruktion mit der Bildung homogener Komplexe zusammenfällt. Wir wollen also nur die nicht trivialen Lösungen von (A), d. h. die Komplexe, die nicht in homogene zerfallen, als Lösungen von (A) bezeichnen.

Präziser formulieren wir:

Definition I. Ein (n, k) mit den Charakteristiken (A) sei „Lösung" des Systems (A), wenn keine Relation $(n, k) = (n_1, k_1) + (n_2, k_2)$ besteht, wo (n_1, k_1) für passendes ρ aus der Reihe $1, \ldots, m$ homogen von der Charakteristik χ_ρ ist.

Nicht jedes System besitzt eine Lösung. Eine solche gibt es z. B. dann nicht, wenn die Zahlen eines χ_ρ in den anderen Charakteristiken von (A) nicht mehr vorkommen. Dies folgt unmittelbar aus dem Beweis des Satzes 12 von (S. G. I.) (Seite 249). Denn die Geraden mit χ_ρ können eine

Gerade einer anderen Charakteristik χ_μ nur in einfachen Punkten schneiden, da ein gemeinsamer Kreuzungspunkt ein χ_ρ und χ_μ gemeinsames Element ergibt, obwohl dies doch nach Voraussetzung ausgeschlossen ist. Also bilden schon die Geraden mit χ_ρ einen homogenen Geradenkomplex.

Insbesondere stellen die irreduziblen Komplexe Lösungen passender (A) dar. Während es stets solche (n, k) der Charakteristik $(a^{(1)}, \ldots, a^{(s)})$ gibt, z. B. die mit kleinstem n, existieren im allgemeinen keine irreduziblen Lösungen von (A). Das rechtfertigt folgende Definition:

Definition II. Ein System von m Charakteristiken (A) soll ein irreduzibles System m-ter Ordnung heißen, wenn es mindestens eine irreduzible Lösung von (A) gibt.

Nennt man ein System (A) zusammenhängend, wenn es nicht in zwei Systeme (A′) und (A″) zerfällt, deren Charakteristiken keine Zahlen gemeinsam haben, so folgt: Ein irreduzibles System ist zusammenhängend. Man entnimmt dies wie oben Satz 12 von (S. G. I.).

Bezeichnungen: Ein (n, k) mit genau m Charakteristiken $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m$ heißt ein Komplex m-ter Ordnung. Stets bezeichne G_ρ die Zahl der Geraden von (n, k) mit der Charakteristik χ_ρ $(\rho = 1, \ldots, m)$, sodaß $G_1 + G_2 + \cdots + G_m = n$ ist. $\sigma_{\rho,a}$ gebe an, wie oft die Zahl a in χ_ρ vorkommt $(\rho = 1, \ldots, m)$. Dann werden im folgenden meistens die Formeln (4a) und (4b) von (S. G. I.) (Seite 242) für die Anzahl der $(a-1)$-fachen Schnittpunkte angewendet:

$$s_{a-1} = \sum_{\rho=1}^{m} \frac{\sigma_{\rho,a}}{a} \cdot G_\rho \tag{5}$$

bzw. bei homogenen (n, k)

$$s_{a-1} = \frac{\sigma_a \cdot n}{a} . \tag{6}$$

Es wird nachstehend noch folgendes Kriterium für irreduzible Systeme zweiter Ordnung benutzt:

Satz 1. (n, k) habe χ_1 auf G_1, χ_2 auf G_2 Geraden. Der homogene (G_1, k') mit der Charakteristik χ_1 existiere nicht. Dann bildet χ_1, χ_2 ein irreduzibles System.

Beweis: Ist unter den irreduziblen Summanden, in die (n, k) zerfällt, ein inhomogener, so muß dieser χ_1, χ_2 als Charakteristiken besitzen. Sind aber die Summanden alle homogen, so fasse man die Komplexe mit der Charakteristik χ_1 zu einem homogenen Geradenkomplex (n_1, k_1) zusammen. Dann muß, da die anderen Summanden nur die Charakteristik χ_2 haben, gegen die Annahme $n_1 = G_1$ sein.

Irreduzible Systeme zweiter Ordnung.

Hier lautet die notwendige Bedingung, daß χ_1 und χ_2 Glieder gemeinsam haben. Gibt es in jeder Klasse irreduzible inhomogene Systeme? Bisher war nur bekannt, daß in Klasse $c = 1$ und $c = 2$ keine solchen Komplexe vorkommen ((S. G. I.) Seite 247 und 249). Im Gegensatz dazu beweisen wir:

Satz 2. In jeder Klasse $c > 2$ existiert mindestens ein inhomogenes irreduzibles System.

Beweis: Man gewinnt die Charakteristiken einer Klasse, indem man c als Summe positiver ganzer Zahlen darstellt und zu jeder 2 addiert. Sei $c = 3$. Es ist

$$c = \begin{cases} 3 = 1+1+1, & \chi_1 = (3, 3, 3); \\ 3 = 1+2, & \chi_2 = (3, 4); \\ 3 = 3, & \chi_3 = (5). \end{cases}$$

Nach obigem kommt nur das System $\chi_1 = (3, 3, 3) = (3_3)$, $\chi_2 = (3, 4)$ als irreduzibel in Betracht. Ist (n, k) eine Lösung dieses Systems, so ist nach (5)

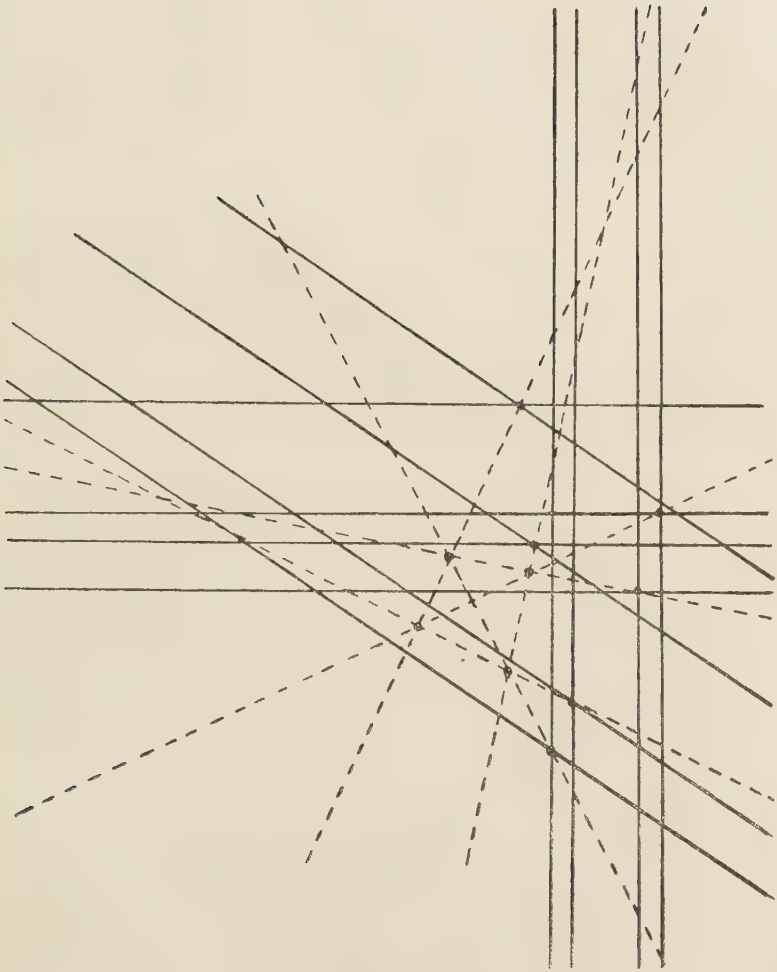
$$s_2 = \frac{3\,G_1 + G_2}{3} = G_1 + \frac{G_2}{3}, \quad s_3 = \frac{G_2}{4},$$

also $12/G_2$ und daher

(7) $$G_2 \geq 12.$$

Man kann einen solchen (n, k) etwa folgendermaßen konstruieren: Wir zeichnen in einer Ebene dreimal den (4, 1). Je zwei von diesen mögen sich gegenseitig in einfachen Schnittpunkten schneiden. Wir markieren 6 dieser Schnittpunkte so, daß auf jeder Geraden nur einer dieser markierten Punkte liegt. Dann konstruiert man ein (6,3) (vollständiges Viereck) so, daß auf jeder der 6 Geraden je einer dieser Punkte liegt, sonst aber keine neuen Kreuzungspunkte entstehen. Das ist möglich, da ich über die Lage der Punkte und die Gestalt von (6, 3) beliebig verfügen kann. (Figur 2.) Dieser aus 18 Geraden bestehende Geradenkomplex (18, k) hat auf $G_1 = 6$ Geraden $\chi_1 = (3, 3, 3)$, auf $G_2 = 12$ Geraden $\chi_2 = (3, 4)$. Es ist offenbar ein irreduzibler Komplex wegen (7). In Klasse $c = 3$ ist also $\chi_1 = (3, 3, 3)$, $\chi_2 = (3, 4)$ ein irreduzibles System. Analog entnehme man in Klasse $c = 4$ aus den Zerlegungen $4 = 1 + 1 + 1 + 1$ und $4 = 1 + 1 + 2$ die Charakteristiken $\chi_1 = (3, 3, 3, 3)$, $\chi_2 = (3, 3, 4)$. Man zeichne zu den Seiten eines gleichschenkeligen Dreiecks drei parallele Geraden und die „Diagonalen“ (Figur 3) (siehe Seite 14). Auf $3 \cdot 4 = 12$ Geraden hat man dann $\chi_2 = (3, 3, 4)$, auf 3 Geraden $\chi_1 = (3, 3, 3, 3)$. Hieraus folgt sofort der Beweis für beliebige c: Man zeichne $c - 1$ Parallelen zu A, B und C und die 3 „Diagonalen“ und hat dann auf $G_2 = 3 \cdot c$ Geraden $\chi_2 = (3, 3, c)$ bzw. auf $G_1 = 3$ Geraden $\chi_1 = (3, \ldots, 3) = (3_c)$ (Seite 8).
c-mal

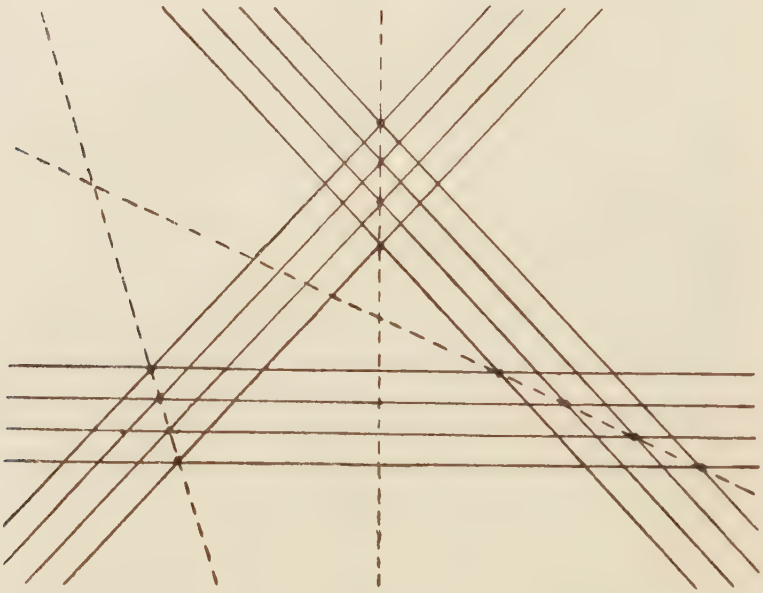
Da $c = \sum_{1}^{c} (3 - 2) = (c - 2) + (3 - 2) + (3 - 2)$ ist, gehören χ_1 und χ_2 der Klasse c an. Es fehlt nur noch der Nachweis der Irreduzibilität. Jedenfalls zerfallen diese Komplexe nicht in homogene: $(n, k) \quad (n', k') + (n'', k'')$, wo etwa (n', k') die Charakteristik χ_1, (n'', k'') die Charakteristik χ_2 hat. Denn dann wäre $n' = G_1 = 3$, also $(n', k') = (3, k')$ ein symmetrischer Geradenkomplex der Charakteristik (3_m), was unmöglich ist. Zerfällt (n, k) in inhomogene Summanden,



Figur 2
(18, 14)
1. Charakteristik (3, 4)
2. Charakteristik (3, 3, 3)

so muß einer davon irreduzibel sein und χ_1 und χ_2 als Charakteristiken haben.

Anmerkung: Daß schon diese Komplexe selbst irreduzibel sind, kann man etwa so beweisen: Sei $(n, k) = (n', k') + (n'', k'')$! (n', k') und (n'', k'') haben etwa $\chi_1 = (3_m)$ auf G_1' bzw. G_1'' Geraden, χ_2 auf G_2' bzw. G_2'' Geraden. Dann ist nach (5) für (n', k')



Figur 3
(15, 10)
_ _ _ 1. Charakteristik (3, 3, 3, 3)
_____ 2. Charakteristik (3, 3, 4)

$$s'_{c-1} = \frac{\sigma'_{1,c} \cdot G'_1 + \sigma'_{2,c} \cdot G'_2}{c} = \frac{G'_2}{c},$$

also $G'_2 = c$ oder $G'_2 = 2c$. Ebenso folgt $G''_2 = c$ bzw. $G''_2 = 2c$. Da $G'_2 + G''_2 = G_2 = 3c$ ist, sei etwa $G'_2 = c$. Es ist $G'_1 \leq 2$, da $G'_1 + G''_1 = G_1 = 3$ und $G''_1 \geq 1$.

Es besteht also (n', k') aus c durch einen Punkt gehenden Geraden und 2 weiteren Geraden, die mit diesen nur einen zweiwertigen Punkt bilden können. Nun sollten aber wegen $\chi_2 = (3, 3, c)$ auf jeder der c Geraden 2 zweiwertige Punkte liegen. Da „irreduzibel" nicht mit „geometrisch zusammenhängend" identisch ist (vgl. Seite 44), konnte man dies nicht sofort aus der speziellen Figur 3 entnehmen.

Damit ist also bewiesen, daß

$$\chi_1 = (3_m),\ \chi_2 = (3, 3, m) \tag{8}$$

für $m \geqq 3$ ein irreduzibles System bilden.

Irreduzible (n, k) mit diesen χ_1 und χ_2 liefert für gerades m auch folgende Betrachtung: Man konstruiere m ineinandergeschachtelte Rechtecke mit parallelen Seiten und gemeinsamen Diagonalen. Dann haben die Seiten der Rechtecke, die in zwei Scharen von je $2m$ parallelen Geraden zerfallen, die Charakteristik $(3, 3, 2m) = \chi_2$, die beiden Diagonalen aber $\chi_1 = (3_{2m})$. Sie gehören zur Klasse $c = 2m$. Da $n = 4m + 2$ ist, ist $k = n - c - 1 = 2m + 1$, also $(n, k) = (4m + 2,\ 2m + 1)$. Sie sind von den obigen verschieden, da hier immer $G_1 = 2$ ist. Daß sie irreduzibel sind, folgt nach (S. G. I.) Seite 246, Satz 7 aus $k = \frac{n}{2}$.

Alle diese Charakteristiken konnten aus der Darstellung $c = 1 + \cdots + 1$, $c = 1 + 1 + (c - 2)$ entnommen werden.

Ist c gerade, also $c = 2 + 2 + \cdots + 2 = 2q$, so kann man durch eine der letzten Schlußweise analoge Überlegung auch für die aus $c = 2 + \cdots + 2$, $c = 2 + 2 + (c - 4)$ entstehenden Charakteristiken irreduzible Komplexe gewinnen.

Bei m ineinander geschachtelten Würfeln, deren Seitenflächen parallel sind und die gemeinsame Körperdiagonalen haben, bilden die (zu Geraden verlängerten) Kanten und die vier gemeinsamen Körperdiagonalen einen Geradenkomplex, der nach Projektion in eine Ebene symmetrisch wird. Denn er hat auf vier Diagonalen die Charakteristik $\chi_1 = (4_{2m+1})$.

Jede Diagonale geht nämlich durch zwei Ecken jedes Würfels, in denen sich 4 Geraden schneiden, also durch 2m Ecken. Dazu kommt noch der 3-wertige Mittelpunkt. Von jedem Würfel gehen nach drei Richtungen 4 parallele Kanten aus, also insgesamt 3 Scharen von je 4m parallelen Geraden. Ihnen entspricht $\chi_2 = (4, 4, 4m)$; χ_1 und χ_2 gehören der gleichen Klasse an, da $c = \sum_{1}^{2m+1} (4-2) = 2\cdot(2m+1)$ $= (4-2)+(4-2)+(4m-2)$ ist. Die Irreduzibilität folgt so: Wäre $(n, k) = (n_1, k_1)+(n_2, k_2)$ und hätte (n_1, k_1) bzw. (n_2, k_2) die Charakteristik χ_2 auf G_2' bzw. G_2'' Geraden, so müßte die Anzahl der $(4m-1)$-wertigen Punkte dieser Summanden $s'_{4m-1} = \frac{G_2'}{4\cdot m}$ bzw. $s''_{4m-1} = \frac{G_2''}{4\cdot m}$ sein; also wäre $4m | G_2'$; $4m | G_2''$; $G_2' + G_2'' = G_2 = 3\cdot 4\cdot m$. Aus diesen Beziehungen folgt, daß ein $G_2^{(\mu)}$, etwa $G_2' = 4m$ ist. Dann sieht man wie vorhin, daß die 4m Geraden von (n_1, k_1), die wegen $\chi_2 = (4, 4, 4m)$ durch einen Punkt gehen, mit höchstens 3 anderen Geraden G_1' nur einen 3-wertigen Punkt bilden können; die Anzahl der dreiwertigen Punkte ist aber größer als m.

Wir betrachten nun allgemein die Zerlegung $c = a + \cdots + a$, $c = a + m'$ von c.

Satz 3. Es sei b ein Teiler der Klassenkonstante c, $c = b\cdot m$, $m > 1$. Die aus den entsprechenden Darstellungen $c = \underbrace{b + \cdots + b}_{m\text{-mal}}$ und $c = b + (c-b)$ hervorgehenden Charakteristiken sind dann:

$$\chi_1 = ((b+2)_m),\quad \chi_2 = (b+2, c-b+2)$$

oder, wenn $b+2 = a$, $c-b+2 = m'$ gesetzt wird:

$$\chi_1 = (a_m),\quad \chi_2 = (a, m'). \tag{9}$$

Dann bildet (9) für jedes m ein irreduzibles System.

Beweis: $g_1, g_2, \ldots, g_{m'}$ seien m' Geraden der projektiven Ebene. s sei ein Teiler von m; $m = ss'$, $s \geq 1$. Ich

markiere auf g_ρ die s Punkte $P_{\rho,1}, \ldots, P_{\rho,s} (\rho = 1, \ldots, m')$. Durch $P_{1,1}$ lege ich $a-1$ Geraden; durch jeden der anderen Punkte $P_{\rho,\sigma} (\sigma = 1, \ldots, s;\ \rho = 1, \ldots, m')$ zeichne ich $a-1$ Parallele zu diesen Geraden. Dann gibt es zu jeder dieser $(a-1) \cdot s \cdot m'$ Geraden genau $m' \cdot s - 1$ Parallelen — nämlich durch jeden der $P_{\rho,\sigma}$ eine Parallele. Ich nehme nun weitere s Punkte auf jeder Geraden g_ρ (also insgesamt weitere $m' \cdot s$ Punkte) und verfahre analog. Dabei soll aber keine der letzteren Geraden einer der vorhin bestimmten parallel sein. So fahre ich s'-mal fort und erhalte auf jeder Geraden $s \cdot s' = m$ Punkte und außer den Geraden g_ρ $(a-1) \cdot m \cdot m'$ Geraden, von denen je $s \cdot m'$ parallel sind. Dabei beachte man, daß im Endlichen außer den $(a-1)$-fachen $P_{\rho,\sigma}$ keine neuen Kreuzungspunkte entstehen. Da ich die Punkte und Geraden beliebig wählen kann, ist dies immer möglich. (Man nehme etwa $g_1, \ldots, g_{m'}$ in m' verschiedenen parallelen Ebenen des Raumes an und projiziere den räumlichen Geradenkomplex in der Ebene.) Es liegen mithin auf jeder der Geraden

1. ein $(a-1)$-wertiger $P_{\rho,\sigma}$

2. ein uneigentlicher $(m' \cdot s - 1)$-wertiger Punkt, durch den die $m's - 1$ Parallelen gehen. Also besitzt jede Gerade die Charakteristik $\chi_2 = (a, m's)$. Jede der m' Geraden g_ρ aber hat $\chi_1 = (a, \ldots, a) = (a_m)$. Damit ein symmetrischer Komplex vorliegt, muß $c = \sum_1^m (a-2) = m \cdot (a-2) = (a-2) +$ $(sm'-2)$ sein oder

$$m's = (a-2)m - a + 4. \tag{10}$$

Gleichung (10) läßt sich durch geschickte Bestimmung von m' und s immer lösen. Setzt man etwa $s = 1$*), so kann man m' aus

*) 1 ist ja immer Teiler von m.

(11) $$m' = (a-2)m - a + 4$$

entnehmen. Man erhält also bei geeigneter Wahl von m' und s einen symmetrischen Geradenkomplex (n, k) mit $\chi_1 = (a_m)$, $G_1 = m'$; $\chi_2 = (a, m's)$, $G_2 = (a-1)\cdot m \cdot m'$. Nach Satz 1 (Seite 11) bildet χ_1, χ_2 ein irreduzibles System, wenn es keinen homogenen (G_1, k_1) mit der Charakteristik χ_1 gibt.

Dieses aber lehrt folgender

Hilfssatz: Hat (n', k') die Charakteristik $\chi = (b_r)$, so ist $n' \geqq (b-1)\cdot r + 1$.

Zum Beweise beachte man, daß auf jeder Geraden g r $(b-1)$-wertige Schnittpunkte liegen; mit diesen sind schon insgesamt $(b-1)\,r+1$ Geraden inzident (g mitgerechnet). (G_1, k_1) hätte $\chi = (a_m)$ auf $G_1 = m'$ Geraden. Dabei ist nach (10) oder (11) $m' \leqq (a-2)\cdot m - a + 4 \leqq (a-2)\cdot m + 1 < (a-1)\cdot m + 1$; nach dem Hilfssatz ist dies jedoch nicht möglich.

Bemerkungen: 1. Im allgemeinen Falle ist (10) nur mit $s = 1$ in ganzzahligen m und s aufzulösen. Existiert jedoch ein $s_1 > 1$ (z. B. wenn $s_1 / a-4$; dann ist $m' = (a-2)\cdot \frac{m}{s_1} - \frac{a-4}{s_1} = (a-2)\cdot s_1' - \frac{a-4}{s_1}$) und sind (n, k) bzw. (n', k') die $s = s_1$ und $s = 1$ entsprechenden Geradenkomplexe, so ist (n', k') reduzibel und

$$(n', k') = \underbrace{(n, k) + \cdots + (n, k)}_{s_1\text{-mal}} = s_1 \cdot (n, k).$$

Beweis: (n', k') hat χ_1 auf $G_1' = m' = (a-2)\cdot m - a + 4$, χ_2 auf $G_2' = (a-1)\cdot m\,(m\cdot(a-2) - a + 4)$ Geraden, (n, k) dagegen χ_1 auf $G_1 = \frac{(a-2)\,m - a + 4}{s_1}$, χ_2 auf $G_2 = \frac{(a-1)\cdot m \cdot ((a-2)\,m - a + 4)}{s_1}$ Geraden.

Also ist $G_1' = s_1 \cdot G_1$, $G_2' = s_1 \cdot G_2$; $(n', k') = s_1 \cdot (n, k)$. ((S.G.I.) Seite 245, Satz 8).

Es wird hier (n', k') aus (n, k) auf eine Weise zusammengesetzt, die nichts mit der—geometrischen—Addition gemein hat. Daraus ersieht man, daß man aus der speziellen Darstellung nicht auf die Irreduzibilität eines Komplexes schließen kann.

2. Kann $s = m$ genommen werden, so gelangt man zu Geradensystemen, die auf wenigen Geraden eine große Anzahl höherwertiger Kreuzungspunkte besitzen.

Z. B. sei $a = 34$, $m = 6$, $m' \cdot 6 = 32 \cdot 6 - 34 + 4$, $m' = 32 - 5 = 27$, $G_1 = 27$. Es liegen also auf 27 Geraden $m \cdot G_1 = 162$ 33-wertige Punkte.

Durch Multiplikation gewinnt man aus diesen inhomogenen Geradenkomplexen neue inhomogene Systeme. Sie sind unter gewissen Voraussetzungen irreduzibel:

Satz 4. Es seien

$$\begin{aligned} \chi_1 &= (a_m, a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(\lambda)}), \\ \chi_2 &= (a, a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(\lambda)}, a^{(\lambda+1)}) \end{aligned} \tag{12}$$

zwei Charakteristiken derselben Klasse, wo $m, a^{(1)}, \ldots, a^{(\lambda)}, a^{(\lambda+1)}$ beliebig, aber $\geqq 3$ sind und a nicht in dem Produkt dieser Zahlen aufgeht. Dann bildet (12) ein irreduzibles System.

Beweis: Da χ_1 und χ_2 derselben Klasse angehören, ist

$$c = \sum_1^m (a-2) + \sum_{\sigma=1}^{\lambda} (a^{(\sigma)} - 2) = (a-2)\, m + \sum_{\sigma=1}^{\lambda} (a^{(\sigma)} - 2)$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{\lambda+1} (a^{(\sigma)} - 2) + (a-2).$$

Mithin ist

$$(a-2) \cdot m = a^{(\lambda+1)} + a - 4,$$
$$a^{(\lambda+1)} = (a-2) \cdot m + 4 - a.$$

Ich setze nach (11) $a^{(\lambda+1)} = m'$. Nach Satz 3 bildet $\chi_1 = (a_m)$, $\chi_2 = (a, a^{(\lambda+1)}) = (a, m')$ ein irreduzibles System. Ihm entspreche (n', k') mit $G_1' = m'$, $G_2' = (a-1)\, m \cdot m'$ (vgl. Be-

weis zu Satz 3). Es sei ferner (n, k) ein Komplex der Charakteristik $(a^{(1)}, \ldots, a^{(\lambda)})$ mit $n = a^{(1)} \cdots a^{(\lambda)}$ Geraden ((S. G. I.) Seite 252, Satz 15). Dann gibt es ein $(\bar{n}, \bar{k}) = (n', k') \times (n, k) = (n' \cdot n, k_1)$ mit $\chi_1 = (a_m, a^{(1)}, \ldots, a^{(\lambda)})$ auf $G_1 = m' \cdot n$ bzw. $\chi_2 = (a, a^{(1)}, \ldots, a^{(\lambda+1)})$ auf $G_2 = (a-1)\, m \cdot m' \cdot n$ Geraden. Es war $m' = a^{(\lambda+1)}$. Also ist $G_1 = n \cdot a^{(\lambda+1)}$.

Wie bei Satz 3 hat man zu zeigen, daß (G_1, k'') mit χ_1 nicht realisierbar ist. Andernfalls würde für die Anzahl der $(a-1)$-fachen Punkte von (G_1, k'') die Gleichung

$$\frac{n \cdot m \cdot a^{(\lambda+1)}}{a} = \frac{G_1 m}{a} = s_{a-1}$$

bestehen, was wegen $a \nmid n \cdot m \cdot a^{(\lambda+1)}$ unmöglich ist.

Wir betrachten nun zwei beliebige Charakteristiken einer Klasse: $\chi_1 = (a^{(1)}, \ldots, a^{(l)})$, $\chi_2 = (b^{(1)}, \ldots, b^{(s)})$. Damit dieses irreduzibel ist, muß ein $a^{(\rho)}$ gleich einem $b^{(\mu)}$ sein; es sei etwa $a^{(1)} = b^{(1)}$. Dann läßt sich folgendes behaupten:

Satz 5. Es seien

$$\begin{aligned} \chi_1 &= (a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(l)}), \\ \chi_2 &= (a^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(s)}) \end{aligned} \tag{13}$$

zwei Charakteristiken der Klasse c. Es teile $a^{(1)}$ nicht das Produkt $m \cdot n$, wo $m = a^{(2)} \cdots a^{(l)}$, $n = b^{(2)} \cdots b^{(s)}$ ist. Dann ist (13) ein irreduzibles System.

Beweis: Nach (S. G. I.) Seite 252, Satz 15 gibt es ein (n', k') mit der Charakteristik $\chi_1' = (a^{(1)} - 1, a^{(2)}, \ldots, a^{(l)})$, wo $n' = (a^{(1)} - 1) \cdot a^{(2)} \cdots a^{(l)}$ ist. Ebenso existiert ein (n, k'') mit der Charakteristik $\chi_2' = (b^{(2)}, \ldots, b^{(s)})$ und $n = b^{(2)} \cdots b^{(s)}$ Geraden. Die Zahl der $((a^{(1)} - 1) - 1)$-fachen Schnittpunkte von (n', k') beträgt:

$$s_{(a^{(1)}-1)-1} = \frac{a^{(2)} \cdots a^{(l)} \cdot (a^{(1)} - 1)}{a^{(1)} - 1} = a^{(2)} \cdots a^{(l)} = m.$$

Ich bilde nun die n-fache Summe von $(n', k') + \cdots + (n', k')$ (n-mal) $= n \cdot (n', k')$, d. h. ich konstruiere (n', k') n-mal so, daß sich

die Geraden zweier Komplexe in einfachen Punkten schneiden. Man hat dann nm $((a^{(1)}-1)-1)$-fache Schnittpunkte. Ebenso bilde ich die Summe $m\cdot(n, k'')$ und erhalte einen Geradenkomplex mit $n\cdot m$ Geraden.

Dabei kann ich diese $m\cdot(n, k'')$ so zeichnen, daß jede dieser $m\cdot n$ Geraden mit einem der obigen nm $((a^{(1)}-1)-1)$-fachen Punkte inzident ist, jedoch keinen anderen Schnittpunkt von $n\cdot(n', k')$ trifft. Diese Behauptung wird auf Seite 39—40 begründet werden.

Die $((a^{(1)}-1)-1)$-fachen Schnittpunkte haben nun die Wertigkeit $a^{(1)}-1$, die $n\cdot n'$ Geraden von $n\cdot(n', k')$ besitzen jetzt die Charakteristik $\chi_1=(a^{(1)}, \ldots, a^{(l)})$, während die $m\cdot n$ Geraden von $m\cdot(n, k'')$ die Charakteristik $\chi_2=(a^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(s)})$ haben.

Da χ_1 und χ_2 derselben Klasse angehören, ist der aus der Gesamtheit dieser Geraden bestehende Komplex symmetrisch. Er hat χ_1 auf $G_1=nn'=nm(a^{(1)}-1)$ Geraden. Bleibt wiederum noch zu zeigen, daß ein (G_1, k''') mit der Charakteristik χ_1 nicht existiert. Andernfalls wäre die Anzahl seiner $(a^{(1)}-1)$-fachen Punkte

$$s_{a^{(1)}-1}=\frac{G_1}{a^{(1)}}=\frac{(a^{(1)}-1)\cdot m\cdot n}{a^{(1)}}.$$

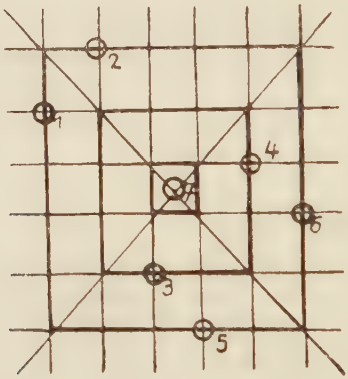
$a^{(1)}$ sollte aber in $m\cdot n$ nicht aufgehen. Mithin ist (13) ein irreduzibles System. Man wird bemerken, daß beim Beweise $a^{(1)}-1\geq 3$ angenommen war; jede Charakteristik soll ja nur Elemente $a\geq 3$ enthalten. Da aber diese Festsetzung nur aus bezeichnungstechnischen Gründen getroffen war, die beim Beweise benutzten Relationen also auch für „Charakteristiken", die die Zahl 2 enthalten, gelten, bestätigt man unschwer das Resultat des Satzes auch für $a^{(1)}=3$.

Die Voraussetzungen dieses Satzes unterscheiden sich nur durch die Forderung „$a^{(1)}$ teilt nicht $m\cdot n$" von der notwendigen Bedingung für irreduzible Systeme. Hieraus und aus den Formeln (8), (9) und (12) kann man vermuten, daß ein System zweiter Ordnung schon dann irreduzibel ist,

wenn es zusammenhängend ist (Seite 10). Bei der Bildung von Systemen höherer Ordnung kommt man immer wieder auf die oben behandelten Formen, z. B. entspricht etwa dem System (8) von Seite 15 ($\chi_1 = (3_m)$, $\chi_2 = (3, 3, m)$) bei drei Charakteristiken das System:

(A) $\chi_1 = (3_{m+1})$, $\chi_2 = (3, 3, m+1)$, $\chi_3 = (3, 3, 3, m)$

($m+1$ statt m, damit alle χ derselben Klasse angehören). Einen Geradenkomplex mit diesen Charakteristiken kann man sich etwa so konstruieren: Wir können bei dem schon früher behandelten ($4m+2$, $2m+1$) (m ineinandergeschachtelte Rechtecke, Seite 15) $2m+1$ der einfachen Schnittpunkte so annehmen, daß auf jeder Geraden genau einer dieser Schnittpunkte liegt (Figur 4 für $m = 3$). Ich zeichne dann in der



Figur 4
(14, 7)
$m=3$, $2m+1=7$

Ebene diesen Komplex zweimal, und zwar so, daß die $2\cdot(2m+1)$ einfachen Punkte, die man dann erhält, auf $2m+1$ durch einen Punkt gehenden Geraden liegen. Dabei soll jede solche Gerade mit genau 2 dieser einwertigen Punkte inzident sein. Natürlich gehören diese Geraden nicht

zu den Komplexgeraden. (Man bringe etwa durch eine lineare Transformation alle Schnittpunkte innerhalb eines Kreises. Dann lege ich durch jeden der bezeichneten einfachen Punkte eine Gerade so, daß diese alle anderen Komplexgeraden einfach schneidet. Ich kann diese $2m+1$ Geraden derart wählen, daß sie zueinander parallel sind. Schließlich verschieben wir den Komplex in Richtung der Parallelen. Dann erhalten wir zwei Geradenkomplexe, und dieselben $2m+1$ einfachen Punkte des letzteren liegen ebenfalls auf den $2m+1$ Parallelen. Dabei beachte man, daß außer diesen keine neuen Kreuzungspunkte entstehen.)

Man hat dann die Charakteristiken:

$\chi_1 = (3_{2m+1})$ auf den 4 Diagonalen,

$\chi_2 = (3, 3, 2m+1)$ auf den $2m+1$ Parallelen,

$\chi_3 = (3, 3, 3, 2m)$ auf den $4m$ Seiten der Rechtecke.

Es kommt nämlich auf jeder Geraden ein 2-wertiger Punkt hinzu bzw. bei den Parallelen zwei 2-wertige. Da alle derselben Klasse angehören, bilden diese Linien ein (n, k) mit

$$(14)\quad \chi_1 = (3_{m'+1}),\quad \chi_2 = (3, 3, m'+1),\quad \chi_3 = (3, 3, 3, m'),$$
$$G_1 = 4, \qquad G_2 = m'+1, \qquad G_3 = 2m',$$
$$m' = 2m.$$

Ich zeige, daß (14) irreduzibel ist, wenn $m' \not\equiv 2 \pmod 3$. Wenn unter den Summanden, in die (n, k) zerfällt, ein irreduzibler vorkommt, und zwar mit 3 Charakteristiken, so können diese nur χ_1, χ_2, χ_3 sein. Dann ist alles bewiesen. Zerfällt jedoch (n, k) in Summanden mit höchstens 2 Charakteristiken, so können folgende Verbindungen vorkommen:

$$\chi_1;\ \chi_1, \chi_2;\ \chi_1, \chi_3;\ \chi_2;\ \chi_2, \chi_3;\ \chi_3.$$

Da χ_1 doch einmal als Charakteristik auftreten muß, so habe ich nur zu zeigen, daß die drei ersten Fälle nicht vorkommen können. Ein homogener (n, k) mit χ_1 und $n \leq 4$ ($G_1 = 4$!) existiert offenbar nicht. Es bleiben noch die Fälle

$$\chi_1, \chi_2 \; ; \; \chi_1, \chi_3 \cdot$$

Der Summand (n', k') habe χ_1 auf G'_1, χ_3 auf G'_3 Geraden. Dann ist

$$s_2 = \frac{(m'+1)\cdot G'_1 + 3\cdot G'_3}{3} = \frac{(m'+1)\cdot G'_1}{3} + G'_3.$$

Wegen $m' \equiv 2 \pmod 3$, also $m'+1 \equiv 0 \pmod 3$ muß $G'_1 = 0$ oder $G'_1 = 3$ sein. Mithin muß auch die Verbindung χ_1, χ_2 auftreten (da $G_1 = 4$), und zwar hier χ_1 auf $G''_1 = 4$ bzw. $G''_1 = 1$ Geraden. Wir bezeichnen diesen Geradenkomplex mit (n'', k''). Für die Anzahl seiner m'-wertigen Punkte haben wir dann, wenn G''_2 die Zahl der Geraden von (n'', k'') mit der Charakteristik χ_2 angibt:

$$s_{m'} = \frac{G''_2}{m'+1}; \; G''_2 = m'+1,$$

da $0 < G''_2 \leqq m'+1 = G_2$ ist.

(n'', k'') besteht aus $m'+1$ durch einen Punkt gehenden Geraden und 1 oder 4 weiteren Geraden. Man sieht sofort, daß diese keinen symmetrischen Geradenkomplex mit den Charakteristiken χ_1, χ_2 bilden können.

Der Beweis der Irreduzibilität führt bei Systemen höherer Ordnung auf eine Anzahl Kongruenzen und diophantische Gleichungen, die meistens sehr schwer zu lösen sind.

III. Anwendungen in der Konfigurationstheorie.

Zur Unterscheidung von dem Zeichen (n, k) für Geradenkomplexe werden im Symbol der Konfigurationen die beiden Ausdrücke g_m und p_n durch ein Semikolon getrennt: $(g_m ; p_n)$.

In der Konfigurationstheorie wird die Frage aufgeworfen, wann eine gegebene Konfiguration

(1) $$(g_m; p_n)$$

durch reelle Geraden und Punkte der projektiven Ebene realisiert werden kann, d. h. wann es g Geraden und p Punkte gibt so, daß jede Gerade mit m Punkten, jeder Punkt mit n Geraden inzident ist. Im folgenden soll unter Realisierung einer Konfiguration stets diese reelle Punkt-Geraden-Konfiguration verstanden sein.

Diese Frage ist, soweit mir bekannt, bis jetzt nicht allgemein beantwortet worden. Die Möglichkeit der Realisierung wurde in den einzelnen Fällen besonders nachgewiesen.

Aus der Beziehung

(2) $$m \cdot g = n \cdot p$$

(vgl. Fr. Levi, Geometrische Konfigurationen, Seite 1) folgt, daß man von den 4 Zahlen m, g, n, p nur 2 beliebig — d. h. beliebig ganzzahlig und ≥ 0 — wählen kann. Mit Angabe von 3 Größen ist die vierte schon bestimmt.

Sind etwa m und n gegeben, so ist

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{g}, \quad p = a \cdot m, \quad g = a \cdot n \ .$$

Mithin sind p und g bis auf einen Faktor a bestimmt. Man kann dabei von dem trivialen Fall $m = n = 0$ — keine Inzidenzen — absehen. Da man über zwei Größen beliebig verfügen kann, sollen nachstehend immer m und n fest gegeben sein. Die Aufgabe besteht dann darin, in

(3) $$(x_m; y_n)$$

alle möglichen x bzw. y so zu bestimmen, daß das Symbol (3) realisierbar wird. Wir hatten die symmetrischen Geradenkomplexe ursprünglich eingeführt, um obige Frage allgemein beantworten zu können. Es soll im folgenden gezeigt werden, wie weit dies jetzt schon möglich ist.

In (S.G.I.) Seite 239 war schon festgestellt worden, daß für $n > 1$ die Punkte der Konfiguration eine Untermenge der Schnittpunkte des von den g Geraden gebildeten Geraden-

komplexes ausmachen und nur bei den trivialen Konfigurationen $(g_1 ; 1_g)$ bzw. $\left(g_{g-1}; \binom{g}{2}_2\right)$ die Konfigurationspunkte mit den Schnittpunkten übereinstimmen. Das sind dann die symmetrischen Geradenkomplexe $(n, 1)$, $(n, n-1)$.

Man kann nun durch Weglassen geeigneter Schnittpunkte eines symmetrischen Geradenkomplexes Konfigurationen bilden. Dies ist aber — von trivialen Konfigurationen abgesehen — nicht bei jedem Geradenkomplex (g, k) möglich. Doch gilt

Satz 6. Hat ein homogener (g, k) die Charakteristik $\chi = (a_1, \ldots, a_r)$, so bilden die g Komplexgeraden und alle $(a_\rho - 1)$-fachen Schnittpunkte für jedes $\rho = 1, 2, \ldots, r$ eine Konfiguration:

$$(4) \qquad \left(g_{\sigma_{a_\rho}}; \left(\frac{g \cdot \sigma_{a_\rho}}{a_\rho}\right)_{a_\rho}\right)$$

Dabei gibt, wie früher, σ_{a_ρ} an, wie oft a_ρ in χ vorkommt.

Der Beweis folgt daraus, daß auf jeder Geraden $\sigma_{a_\rho}(a_\rho - 1)$-fache Schnittpunkte vorkommen und jeder $(a_\rho - 1)$-fache Schnittpunkt mit a_ρ Geraden inzident ist. Es kommen ja nach Formel (6) von Seite 10 — mit g für n — genau $\frac{g \cdot \sigma_{a_\rho}}{a_\rho}$ $(a_\rho - 1)$-fache Schnittpunkte vor. Auch die charakteristische Relation $m \cdot g = n \cdot p$:

$$g \cdot \sigma_{a_\rho} = \frac{g \cdot \sigma_{a_\rho}}{a_\rho} \cdot a_\rho$$

ist hier erfüllt.

Insbesondere kommen hier (n, k) mit der Charakteristik $\chi = (\underbrace{a, \ldots, a}_{s\text{-mal}})$ in Betracht. Wir wollen sie in der Form:

$$\chi = (\underbrace{n, n, \ldots, n}_{m\text{-mal}})$$

schreiben. Dann wird (4) zu

(5) $$\left(g_m ; \left(\frac{g \cdot m}{n}\right)_n\right).$$

Diese Konfigurationen haben die bemerkenswerte Eigenschaft, daß ihre Geraden zugleich einen symmetrischen Geradenkomplex bilden.

Definition III. Eine ebene Konfiguration, deren Geraden einen symmetrischen (g, k) bilden, heiße symmetrische Konfiguration.

In (S.G.II.) wurde die „Vollständigkeit" der Lösungsmenge einer Charakteristik mit m Elementen n bewiesen. Das heißt: Für alle g, die größer als eine Konstante γ sind, existiert ein (g, k), das χ als Charakteristik hat, sobald die notwendige Bedingung: n teilt $g \cdot m$ erfüllt ist. Die Bedingung n/gm ergibt sich aus der Formel $s_{m-1} = \frac{g \cdot m}{n}$ für die $(n-1)$-fachen Schnittpunkte.

Es sei $n \geq 3$:

Satz 7. Zu je zwei natürlichen Zahlen m und n gibt es eine Konstante γ so, daß für alle $x \geq \gamma$ und $y \geq \gamma$, die die notwendige Bedingung $x \cdot m = y \cdot n$ erfüllen, $(x_m; y_n)$ realisierbar ist, und zwar durch eine symmetrische Konfiguration.

Der Beweis folgt aus der „Vollständigkeit" von $\chi = (\underbrace{n, \ldots, n}_{m\text{-mal}})$. Denn danach gibt es ein γ_1 so, daß für jedes $x \geq \gamma_1$ ein (x, k) mit der Charakteristik χ existiert, sobald $s_{n-1} = \frac{m \cdot x}{n}$ ganz-rational ist. Setzt man $\frac{m \cdot x}{n} = y$, so erhält man die Konfiguration $(x_m; y_n)$, in der dann $y \geq \frac{m \cdot \gamma_1}{n} = \gamma_2$ ist. x, y nehmen umgekehrt für $x \geq \gamma$, $y \geq \gamma$ ($\gamma_1 \leq \gamma$, $\gamma_2 \leq \gamma$) alle Wertepaare an, für die $x \cdot m = y \cdot n$ ist.

Die Beziehung $mg = np$ gilt nicht nur für die Punkt-Geraden-Konfiguration, sondern für jede geometrische Kon-

figuration, sodaß also $mg = np$ bei $x > \gamma$, $y > \gamma$ für jede Realisierung von $(x_m; y_n)$ eine notwendige und hinreichende Voraussetzung ist.

Man kann diese Konstante in einzelnen Fällen genau angeben.

Es sei $m = 1$: $(x_1; y_n)$. Alle Zahlen dieser Konfiguration sind $y = 1, 2, 3, \ldots$; $x = n \cdot y$. Ich bilde die y-fache Summe des Geradenkomplexes $(n, 1)$, erhalte also $y \cdot (n, 1) = (yn, yn - n + 1)$. Bei diesem aus $y \cdot n$ Geraden bestehenden Komplex ist jede Gerade mit einem $(n-1)$-fachen Punkte inzident. Die Anzahl dieser Punkte beträgt y. Also läßt sich $(x_1; y_n)$ immer realisieren, sobald $x = y \cdot n$ ist, $y = 1, 2, 3, \ldots$.

Wir nehmen noch $(x_2; y_n)$. Es ist hier $2x = y \cdot n$. Wir wissen, daß jede solche Konfiguration aus einem Geradenkomplex besteht, bei dem man geeignete Schnittpunkte nicht mitzählt. Wir berechnen die Zahl der $(n-1)$-fachen Schnittpunkte dieses — nicht unbedingt symmetrischen — Komplexes. Sie beträgt

$$s_{n-1} = \frac{\sigma_{1,n} + \cdots + \sigma_{x,n}}{n}$$

(die Formel (5) von Seite 10 gilt auch für nicht symmetrische Geradenkomplexe). Da $\sigma_{\rho,n} \geq 2$ ist, so folgt $s_{n-1} \geq \frac{2 \cdot x}{n}$. Beachtet man, daß durch einen $(n-1)$-fachen Punkt n Geraden gehen und auf jeder außer diesen ein weiterer $(n-1)$-wertiger Punkt liegt, so hat man $s_{n-1} \geq n + 1$. Da hier aber der extreme Fall angenommen war, daß auf jeder Geraden nur zwei Schnittpunkte liegen, so gilt: $\frac{2 \cdot x}{n} > n + 1$ oder $x \geq \frac{(n+1) \cdot n}{2}$. Nun stellt nach Formel (1) Seite 5 $\binom{n+1}{2} + n \cdot z$ bzw. — für gerades n — $\binom{n+1}{2} + \frac{n}{2} z$ $(z = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ die Lösungsmenge von $\chi = (n, n)$ dar, die zugleich die Konfigurationen

$$\left(\left(\binom{n+1}{2}+\frac{n}{2}\cdot z\right)_2\ ;\ \left(n+1+z\right)_n\right) \qquad (n=2q),$$

$$\left(\left(\binom{n+1}{2}+n\cdot z\right)_2\ ;\ \left(n+1+2\cdot z\right)_n\right) \qquad (n=2q+1)$$

darstellt. Wegen $x \geq \frac{(n+1)n}{2}$ und $2\cdot x = n\cdot y$, also $n/2x$ sind dies auch alle möglichen Fälle. γ hat hier den Wert $\binom{n+1}{2}$.

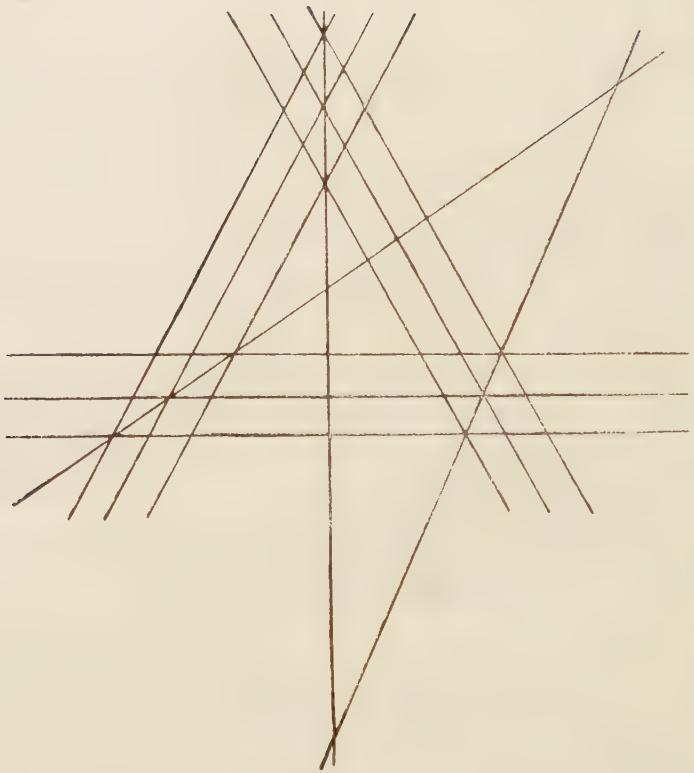
Es ist das Wesentlichste an dem zuletzt Bewiesenen, daß $(x_2; y_n)$ immer durch eine symmetrische Konfiguration dargestellt werden kann. Wenn man sich nicht auf symmetrische Konfigurationen beschränkt, konnte dies Ergebnis einfacher gezeigt werden.

Setzt man $m = n = 3$, so erhält man wegen $3x = 3y$ — also $x = y$ — die Konfiguration $(x_3 ; x_3)$ oder

$$(x_3).$$

Diese Konfigurationen sind ausführlicher behandelt worden. Die Literatur hierüber ist ziemlich umfangreich (vgl. den Bericht in Enzykl. d. math. Wiss., Bd. III, 1, Seite 486). Bei ihnen wurden für jedes x Kriterien der möglichen Realisierung gegeben. Es wird auch in manchen Fällen die „Restfigur" betrachtet. Soweit mir bekannt, wurde jedoch nicht die naheliegende Frage behandelt, wann die Restfigur — d. h. der von den g Konfigurationsgeraden gebildete Geradenkomplex — symmetrisch ist.

$m = n = 3$ entspricht der Charakteristik $\chi = (3, 3, 3)$. χ gehört zur Klasse $c = 3$. Alle (n, k) dieser Klasse haben wegen $c = n - k - 1$ das Symbol $(n, n - c - 1) = (n, n-4)$. Figur 1 entnehmen wir, daß ein (9,5) mit χ existiert. Aus Formel 3 (Seite 6) findet man für $a = 3$, $s = 3$ den (10,6). Figur 5 lehrt, daß es im Reellen einen (12,8) mit dieser Charakteristik gibt. Durch Addition erhält man aus diesen dann die Komplexe



Figur 5
(12, 8)
Charakteristik (3, 3, 3)

$$(9{,}5)\cdot x+(10{,}6)\cdot y+(12{,}8)\cdot z=(9x+10y+12z,\ k)$$
$$(x, y, z = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Nach kurzer Rechnung erkennt man, daß für diese x, y, z $9x+10y+12z=u$ jede ganze Zahl >17 darstellt mit Ausnahme von 23, 25, 35. Für $n>36$ ist also (x_3) stets durch eine symmetrische Konfiguration realisierbar. Das ist jedoch nicht die einzige Art, um zu einer symmetrischen Restfigur von (x_3) zu gelangen. Ein homogener (x, k) der Charakteristik $(3, 3, 3, a_1, \ldots, a_s)$, $(a_1\, a_2, \ldots, a_s$ beliebige von 3 verschiedene Zahlen) stellt z. B. eine solche (x_3) dar.

Im allgemeinen Falle ist zur Bestimmung von γ die Kenntnis der Lösungsmenge M der Charakteristik $(\underbrace{n, \ldots, n}_{m\text{-mal}})$ nötig. — Die „Vollständigkeit" von M bedeutete, daß ihre Zahlen von γ' ab alle Vielfachen von $\frac{n}{[n, m]}$ ausmachen ($[n, m]$ = größter gemeinsamer Teiler von n und m). Dies folgte aus der Beziehung $s_{n-1} = \frac{m \cdot x}{n}$.

Haben nun zwei positive Zahlen a und b den gr. gem. Teiler d, so weiß man, daß $a \cdot x + b \cdot y = d \cdot (a' \cdot x + b' \cdot y)$ für $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ alle Vielfachen von d, die größer als γ' sind, darstellt (γ' nur von a und b abhängig). Es ist $\gamma' \leqq (a'-1)\, b' \cdot d$. Denn die Zahlen $0 \cdot b'$, $1 \cdot b'$, $2 \cdot b'$, $\ldots$, $(a'-1) \cdot b'$ bilden, da $[b', a'] = 1$ ist, ein vollständiges Restsystem mod a', und jede ganze Zahl $z \geqq b' \cdot (a'-1) \geqq \rho b'$, $\rho = 0, 1, \ldots, (a'-1)$, ist von der Form $\rho \cdot b' + a' \cdot x$, wo $x \geqq 0$ ist. Man kommt also zu einem Näherungswert von γ', wenn man in der Lösungsmenge M von $(\underbrace{n, \ldots, n}_{m\text{-mal}})$ zwei Zahlen x_1 und x_2 mit $[x_1, x_2] = \frac{n}{[m, n]} = d$ bestimmt hat. Es ist dann $\gamma' \leqq \left(\frac{x_1}{d} - 1\right) \cdot x_2$. Da es nun in M die Zahlen

$$\binom{m+n-1}{m},\ n^m,\ \binom{n+m'-1}{m'} \cdot \binom{n+m''-1}{m''} \text{ und}$$

$$\binom{n+m'-1}{m'} \cdot n^{m''}$$

$$(m' + m'' = m)$$

gibt, so kann man darunter zwei derartige Zahlen finden; denn ihre Existenz ist durch den Vollständigkeitssatz erwiesen. $\binom{n+m-1}{m}$ existiert nach Formel 3 (Seite 6). Die anderen Ausdrücke erhält man durch Multiplikation. Zum Beispiel gibt es für die Charakteristiken $(\underbrace{n, \ldots, n}_{m'\text{-mal}})$ bzw. $(\underbrace{n, \ldots, n}_{m''\text{-mal}})$ die Komplexe mit $x = \binom{n+m'-1}{m'}$ und $x = \binom{n+m''-1}{m''}$; durch Multiplikation erhält man dann ein Element der Charakte-

ristik $(\underbrace{n, \ldots, n}_{m'\text{-mal}}, \underbrace{n, \ldots, n}_{m''\text{-mal}}) = (\underbrace{n, \ldots, n}_{m\text{-mal}})$. Die dazu gehörigen Zahlen der Geraden multiplizieren sich dann.

Das γ' der Lösungsmenge M ist aber nicht die Konstante γ der Konfiguration $(x_m; y_n)$. Denn $(x_m; y_n)$ ist nur für die $x \geq \gamma$ realisierbar, für die $x = \frac{n \cdot y}{m}$ ist, d. h. $y = \frac{m}{n} x$, $y \geq \frac{m}{n} \gamma'$. Falls $m > n$ ist, muß mithin γ' noch mit $\frac{m}{n}$ multipliziert werden.

Da mit $(x_m; y_n)$ auch $(y_n; x_m)$ — die reziproke Konfiguration — realisierbar ist (F. Levi, „Geometrische Konfigurationen", Seite 2), kann man allgemein $m < n$ annehmen. Denn wenn $m > n$ ist, betrachte man die reziproke Konfiguration $(y_n; x_m)$.

Zum Beispiel sei nun in $(x_m; y_n)$ n eine Primzahl und $n > m$. Dann ist $\gamma < \left(\frac{\binom{m+n-1}{m}}{n} - 1 \right) \cdot n^m$. Denn wegen $[m, n] = 1$ ist $d = n$. Weiter ist $\left[\binom{m+n-1}{m}, n^m \right] = n$, da $\binom{n+m-1}{m} = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}$ wegen $n > m$ die Primzahl n nur einmal enthält.

IV. Untersuchungen über die Lage der Schnittpunkte und die Zerlegung der projektiven Ebene.

In der Konfigurationstheorie werden ausführlicher die Lage der Konfigurationspunkte und die durch die Konfigurationselemente verursachte Zerlegung der projektiven Ebene oder des Raumes in „Zellen" untersucht.

Bei der Bestimmung der Anzahl der Bereiche oder Zellen, in die ein symmetrischer Geradenkomplex die projektive Ebene zerlegt, kommt man zu übersichtlichen Formeln.

Wir betrachten einen Geradenkomplex K von n Geraden. Die Geraden zerlegen sich gegenseitig in „Strecken". Es bestehe K aus α_0 Schnittpunkten und α_1 Strecken. Dann weiß man, daß zwischen den α_0 und α_1 und der Anzahl α_2 der Zellen, in die K die projektive Ebene zerlegt, die Beziehung

$$(1) \qquad -\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 + 1 = 0$$

besteht. (Einen Beweis findet man in Levi, „Geometrische Konfigurationen", Seite 70, wenn man noch beachtet, daß bei der projektiven Ebene als „geschlossenem Möbiusband" $P - 1 = 1$ ist. „Geometrische Konfigurationen", Seite 70, Formel 28.)

Bei einem (n, k) liegen auf jeder Geraden g k verschiedene Punkte, die g in k Strecken teilen — darunter unendlich große. Mithin hat man $\alpha_1 = n \cdot k$. Die Zahl v der Zellen hat, wenn s die Zahl der Schnittpunkte bezeichnet, wegen

$$-s + n \cdot k - v + 1 = 0$$

den Wert

$$(2) \qquad v = n \cdot k - s + 1.$$

Da s bei gleichen (n, k) — „gleich" im Sinne der bisherigen Gleichheitsdefinition — unverändert bleibt, ist also auch die Zahl der Zellen bei gleichen Kompléxen immer dieselbe. Bei homogenen (n, k) mit der Charakteristik $\chi = (a_1, \ldots, a_r)$ beträgt die Zahl der Schnittpunkte

$$\sum_{\rho\ 1}^{r} \frac{n}{a_\rho} + \frac{k-r}{2} \cdot n$$

($\frac{k-r}{2}$ gibt die Zahl der einfachen Schnittpunkte an, es ist ja jede Gerade mit genau $k - r$ einfachen Schnittpunkten inzident). Setzt man diesen Ausdruck in (2) ein, so hat man

$$v = n \cdot k - \sum_{\rho=1}^{r} \frac{n}{a_\rho} - \frac{k-r}{2} n + 1,$$

$$v = n\left(\frac{k+r}{2} - \sum_{\rho=1}^{r} \frac{1}{a_\rho}\right) + 1. \tag{3}$$

Wenn man bedenkt, daß jede Zelle von mindestens 3 Strecken begrenzt wird, falls nicht alle Geraden durch einen Punkt gehen, so erhält man:

$$n \cdot k \geqq \frac{3v}{2}, \quad v \leqq \frac{2nk}{3} \tag{4}$$

(jede Strecke wird, den beiden Bereichen, bei denen sie als Grenzlinie auftritt, entsprechend, zweimal gezählt). Aus $\frac{2nk}{3} \geqq v = nk + 1 - s$ folgt:

$$s \geqq \frac{nk}{3} + 1, \; k > 1. \tag{5}$$

Die Beziehung (5) kann man verwenden, um in bestimmten Fällen die Nichtexistenz eines symmetrischen Geradenkomplexes — d. h. die Unmöglichkeit der Realisierung eines Symboles (n, k) — zu beweisen.

Ein anderes Kriterium für die Nichtexistenz eines (n, k) für $k > 1$ konnte ich folgendermaßen gewinnen:

Die Zerlegung einer Komplexgeraden sei gleich $a_1 + a_2 + \cdots + a_r + 1 + \cdots + 1 = n - 1$ ((S.G.I.) Seite 240). Hier ist $a_\rho < k - 1$ für $\rho = 1, 2, \ldots, r$ ((S.G.I.) Seite 241, Satz 1). Nach dem nächsten Satz 8 ist mindestens ein Summand der Zerlegung gleich 1, also $r < k - 1$. Mithin folgt: $n - 1 \leqq (k-1) \cdot (k-1) + 1$ oder

$$n \leqq (k-1)^2 + 2 = k^2 - 2 \cdot k + 3. \tag{6}$$

Beispiele: Ist (7, 3) realisierbar? Es müßte dann $7 \leqq 3^2 - 2 \cdot 3 + 3 = 9 - 6 + 3 = 6$ sein. Desgleichen ist z. B. (12,4) nicht zu zeichnen, da $12 > 4 \cdot 4 - 2 \cdot 4 + 3 = 11$ ist.

Die Tragweite von (5) wollen wir ebenfalls an einem Beispiel zeigen:

Satz 8. Es gibt keinen symmetrischen Geradenkomplex, außer den (n, 1), der nur Kreuzungspunkte besitzt.

Beweis: (n, k) habe auf seinen n Geraden $g_1, g_2, \ldots, g_n$ die Charakteristiken:

$$g_1: \chi_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1r_1}),$$
$$g_2: \chi_2 = (a_{21}, \ldots, a_{2r_2}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$g_n: \chi_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nr_n}).$$

Diese können auch alle gleich sein.

Falls auf keiner Geraden einfache Schnittpunkte vorhanden sind, ist $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = k$. Die Zahl der Schnittpunkte s von (n, k) beträgt:

$$s = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{a_{\mu\nu}}.$$

Denn einem Element $a_{\mu\nu}$ entspricht ein $(a_{\mu\nu} - 1)$-wertiger Schnittpunkt. Kommt ein $(a_{\mu\nu} - 1)$-facher Punkt auf G_1 Geraden vor, so tritt $a_{\mu\nu}$ in der äußeren Summe G_1-mal auf, während es in der ersten Summe so oft gezählt wird, als $(a_{\mu\nu} - 1)$-fache Punkte auf den einzelnen Geraden liegen. Nach (5) ist

$$s = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{a_{\mu\nu}} > \frac{n \cdot k}{3} + 1 > \frac{n \cdot k}{3};$$

wegen $a_{\mu\nu} > 3$ $(\mu = 1, \ldots, n; \nu = 1, \ldots, k)$ ist

$$\frac{n \cdot k}{3} < \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{a_{\mu\nu}} \leq \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{3} = \frac{n \cdot k}{3}.$$

Die letzte Beziehung enthält aber einen Widerspruch. Beim Beweise wurde (5) benutzt. (5) gilt aber nicht für die (n, 1).

Man wird sich von der Gestalt eines symmetrischen Geradenkomplexes ein hinreichendes Bild machen können, sobald die Lage der Schnittpunkte bekannt ist. Hierbei sind nur die Kreuzungspunkte wesentlich, d. h. die Punkte, die mit mehr als zwei Geraden inzident sind.

Man kann z. B. eine beliebige ebene Kurve C vorgeben und versuchen, einen symmetrischen Geradenkomplex zu bestimmen, dessen Kreuzungspunkte auf C liegen.

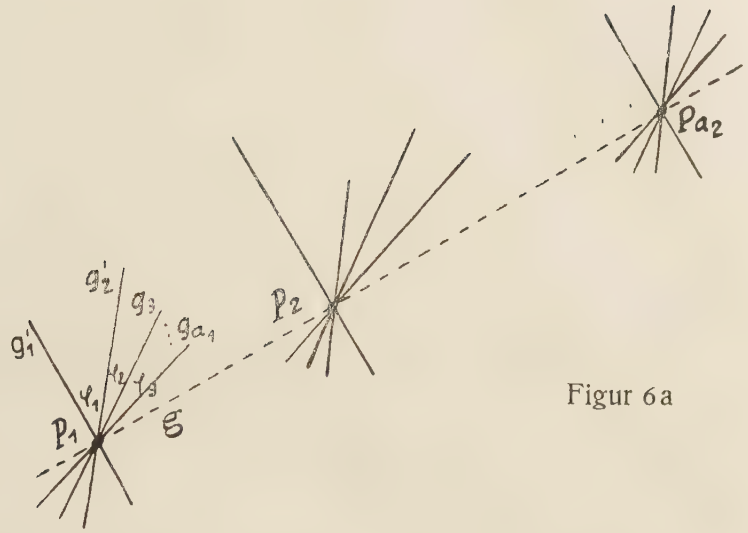
Als bekannte Vergleichskurven wird man Geraden und Kreise wählen. Nach einem Vorgange in der Konfigurationstheorie wollen wir einen homogenen (n, k) mit der Charakteristik $\chi = (a_1, \ldots, a_s)$ „linear geordnet" nennen, wenn für jedes $\rho = 1, 2, \ldots, s$ seine $(a_\rho - 1)$-fachen Schnittpunkte auf genau σa_ρ Geraden vorkommen, die natürlich nicht zu den Komplexgeraden gehören. (σa_ρ gebe an, wie oft a_ρ in χ vorkommt.)

Für $\sigma a_\rho = 1$ $(\rho = 1, \ldots, s)$ liegen die $(a_\rho - 1)$-fachen Schnittpunkte auf einer Geraden.

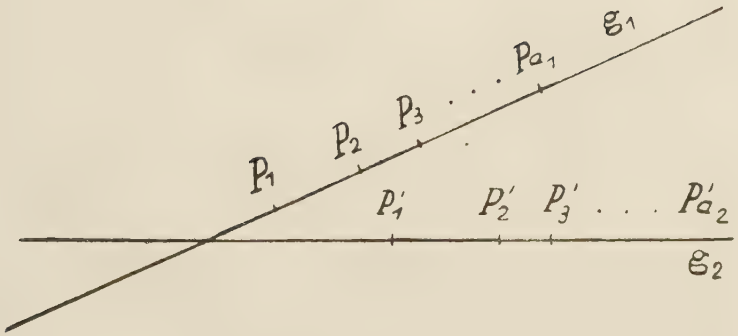
Nach (S.G.I.) Seite 253, Satz 18 machen die Zahlen $a_1 \cdot a_2 \cdots a_s \cdot x$ für $x = 1, 2, \ldots$ einen Teil der Lösungsmenge M der Charakteristik $(a_1, \ldots, a_s)$ aus.

Satz 9. Die homogenen Komplexe (n, k) mit $\chi = (a_1, \ldots, a_s)$ und $n = a_1 \cdots a_s \cdot x$ lassen sich so konstruieren, daß sie „linear geordnet" sind. Dabei kann man die den Zahlen $a_1, \ldots, a_s$ entsprechenden Geraden $g_1, \ldots, g_s$, mit denen die $(a_\rho - 1)$-wertigen Punkte inzident sind, als s beliebige durch einen Punkt gehende Geraden annehmen — mithin also auch als s parallele Geraden.

Beweis: $(a_1 \cdot a_2, k)$ entstehe aus $(a_1, 1)$ durch a_2-fache Parallelverschiebung längs einer nicht zu $(a_1, 1)$ gehörenden Geraden g (Figur 6a). Dann liegen die $(a_2 - 1)$-fachen Punkte auf g_∞, die $(a_1 - 1)$-fachen dagegen sind mit g inzident. Durch lineare Transformation kann man erreichen, daß diese Punkte auf 2 endlichen Geraden g_1 und g_2 liegen, durch deren



Figur 6a



Figur 6b

Schnittpunkt O keine Gerade des Komplexes geht, und keine uneigentlichen Schnittpunkte vorhanden sind (Figur 6b). Durch Verlegung von O ins Unendliche werden g_1 und g_2 parallel. Damit ist der Satz für $s=2$ und $n=a_1 \cdot a_2$ bewiesen.– Der Fall $s=3$ zeigt schon den Beweis für beliebiges s und $n=a_1 \cdots a_s$: Da nämlich keine Komplexgerade zu g_1 oder g_2 parallel ist, kann nunmehr $(a_1 \cdot a_2, k)$ längs der Parallelen g_1, g_2 a_3-mal parallel verschoben werden. Es liegen jetzt von $(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3, k')$ die (a_1-1)-, (a_2-1)- bzw. (a_3-1)-fachen Schnittpunkte auf 3 durch einen — uneigentlichen — Punkt gehenden Geraden, nämlich auf g_1, g_2 und g_∞.

Durch lineare Transformation mache ich die Geraden parallel. (Der Bedingung, daß im Endlichen bei der Parallelverschiebung keine Kreuzungspunkte auftreten, die die Charakteristiken der Geraden verändern würden, kann ich durch genügende Entfernung der verschobenen Geradenkomplexe leicht genügen.) So fahre ich $(s-2)$-mal fort — daß dabei die Abstände der Parallelen noch beliebig gewählt werden können, sieht man sofort ein, wenn man bedenkt, daß die Größe der Abstände davon abhängt, welche Gerade ich in den einzelnen Fällen mit g_∞ vertausche. Damit ist der Beweis für (n, k) mit $n=a_1 \cdots a_s$ geführt.

Die (n', k') mit $n'=a_1 \cdot a_2 \cdots a_s \cdot x$ entstehen aus diesen durch — geometrische — Addition. Diese kann ich so ausführen: Ich konstruiere wie eben $(a_1 \cdots a_s, k)$ x-mal. Und zwar sollen jedesmal die Kreuzungspunkte auf denselben s parallelen Geraden liegen; jedoch werden die Richtungen der einzelnen Komplexgeraden so gewählt, daß niemals zwei verschiedene der so konstruierten (n, k) parallele Geraden haben.

Das ist möglich, da die Bestimmung der s Geraden nur davon abhängt, mit welcher endlichen g_m ich g_∞ in den einzelnen Abschnitten vertausche, die Richtungen der Komplexgeraden jedoch durch die Wahl der Winkel φ_k (Figur 6a) schon beliebig abgeändert werden können. Wir zeichnen

nun die x Geradenkomplexe so nebeneinander, daß die Kreuzungspunkte wieder sämtlich auf s Geraden liegen. Das ergibt jedoch diesmal keine „Parallelverschiebung“ — die Geraden der einzelnen Komplexe sind ja jetzt nicht parallel —; sondern, sobald der Abstand zweier benachbarter Komplexe groß genug ist, damit keine neuen Kreuzungspunkte entstehen, eine — geometrische — Addition. W.z.b.w.

Man kann diese wichtige topologische Eigenschaft dazu verwenden, neue (n, k) zu bekommen, indem man z. B. im Raume verschiedene solche Komplexe längs der Geraden g_k aneinanderlegt. Als Anwendung wollen wir folgende beim Beweise des Satzes 5 von Seite 20 benutzte Behauptung beweisen.

Es ist möglich, den Geradenkomplex $m \cdot (n, k)$ mit der Charakteristik $\chi = (b^{(2)}, \ldots, b^{(s)})$ und $n = b^{(2)} \cdots b^{(s)}$ bzw. $m = a^{(2)} \cdots a^{(l)}$ so zu zeichnen, daß seine $m \cdot n$ Geraden mit den $a^{(2)} \cdots a^{(l)} \cdot n = m \cdot n$ $((a^{(1)} - 1) - 1)$-fachen Schnittpunkten des Komplexes $n \cdot (n', k')$ inzidieren, wo $n' = (a^{(1)} - 1) \cdot a^{(2)} \cdots a^{(l)}$ ist (Seite 21).

Nach Satz 9 (Seite 36) kann ich $n \cdot (n', k')$ wegen $n' = (a^{(1)} - 1) \cdot a^{(2)} \cdots a^{(l)}$ als linear geordnet annehmen. Dann liegen die $((a^{(1)} - 1) - 1)$-fachen Schnittpunkte auf einer nicht zu (n', k') gehörenden Geraden.

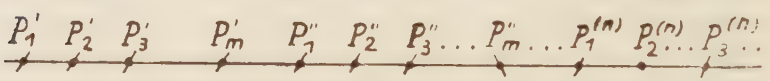
Nach der Schlußweise von Seite 38 verfahre ich dabei wie folgt:

Ich konstruiere (n', k') n-mal so, daß jedesmal die $((a^{(1)} - 1) - 1)$-fachen Punkte auf einer festen Geraden g liegen, niemals aber die Geraden zweier verschiedener Komplexe parallel sind. Dann wird das „Nebeneinanderreihen“ dieser Geradenkomplexe einer — geometrischen — Addition gleichkommen, sobald die einzelnen (n', k') weit genug auseinanderliegen.

Nun sieht man aber sofort, daß ich es so einrichten kann, daß bei allen „nebeneinandergereihten“ Komplexen die Lage der $((a^{(1)} - 1) - 1)$-fachen Punkte in Bezug auf g

dieselbe ist, mithin also beim ersten (n', k') diese Schnittpunkte dieselben Abstände untereinander haben wie beim zweiten (n', k') usw. Denn die Lage der $((a^{(1)}-1)-1)$-fachen Punkte hängt doch von der Wahl der Punkte $P_1, \ldots, P_{a_2}$ auf g (Figur 6a) und den darauf folgenden Parallelverschiebungen und linearen Transformationen ab, aber nicht mehr von den die Winkel der Komplexgeraden verändernden φ_k (Figur 6a). (Die Änderungen der Winkel φ_k bedingen zwar gewisse Einschränkungen in der Wahl der Transformationen und Parallelverschiebungen, die ich aber bei jedem der n vorkommenden Fälle beachten kann.)

Figur 7 zeigt schematisch die Gerade g und die Lage der Schnittpunkte: $P'_1, \ldots, P'_m$ seien die $((a^{(1)}-1)-1)$-fachen Schnittpunkte des ersten (n', k'), $\ldots, P_1^{(n)}, \ldots, P_m^{(n)}$ die des



Figur 7

n-ten (n', k'). Da die Abstände von P'_1 und P''_1, P''_1 und P'''_1, $\ldots, P_1^{(n-1)}$ und $P_1^{(n)}$ nur der Bedingung unterworfen sind, genügend groß zu sein, um das Zusammenfallen einiger Schnittpunkte zu vermeiden, kann ich so bestimmen, daß $P'_1, P''_1, \ldots, P_1^{(n)}$ auf den n Geraden von (n, k) liegen. (Diese Geraden divergieren ja dann, wenn alle Schnittpunkte im Endlichen liegen.)

Da die Schnittpunkte $P'_\rho, P''_\rho, \ldots, P_\rho^{(n)}$ $(\rho = 1, \ldots, m)$ dieselben Abstände haben wie $P'_1, P''_1, \ldots, P_1^{(n)}$, kann ich nunmehr die Geraden des ρ-ten Komplexes (n, k) mit ihnen inzidieren lassen, $\rho = 1, \ldots, m$.

Dem Einwand, daß dabei andere Punkte verschiedener Komplexe zusammenfallen könnten, kann ich begegnen, indem ich zeige, daß ich unendlich viele Möglichkeiten der Konstruktion besitze. Dadurch können die zufälligen Inzidenzen vermieden werden.

V. Anhang.

1. Symmetrische Geradenkomplexe in der nichteuklidischen Geometrie.

Wenn man in (n, k) Gerade = geodätische Linie auf einer Fläche konstanter negativer Krümmung setzt, so findet man, daß hier in der hyperbolischen Geometrie zwei „Additionen" möglich sind.

Daß die Theorie der symmetrischen Komplexe in der elliptischen Geometrie isomorph zur bisherigen ist, erkennt man sofort. (Man bringe durch lineare Transformation alle Schnittpunkte von (n, k) innerhalb eines Kreises K und projiziere die Ebene auf die Halbkugel. (n, k) geht in einen von Großkreisen gebildeten [n, k] über, der innerhalb des sphärischen Bildes von K dieselben Inzidenzen aufweist wie (n, k). Ebenso beweist man die Umkehrung.)

Wir bilden die Fläche konstanter negativer Krümmung durch Einführung isothermer Parameter konform auf die Halbebene $y > 0$ ab. Die Bilder der geodätischen Linien ermitteln wir aus $\dot{x} \cdot \ddot{y} - \dot{y} \cdot \ddot{x} + \frac{\dot{x}}{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 0$*). Es sind dies alle Halbkreise, deren Mittelpunkt auf $y = 0$ liegt, darunter für $r = \infty$ die Parallelen zur y-Achse. Die Definition eines hyperbolischen [n, k], der Begriff der Gleichheit, Charakteristik usw. seien dieselben wie bisher.

Zu einem bisherigen (n, k) existiert der — inbezug auf Inzidenzen — gleiche hyperbolische [n, k]. Ich zeige das an dem Kleinschen Modell der hyperbolischen Geometrie. Alle Schnittpunkte von (n, k) bringe ich innerhalb eines Kreises K. Die Geradenstücke außerhalb und auf dem Rande des

*) vgl. Bieberbach, Differentialgeometrie S. 109.

Kreises lasse ich weg. Außerhalb K kommen ja keine Inzidenzen vor. Dann sind die Geraden von (n, k) zu Sehnen des Kreises geworden. Nach Klein kann man aber die euklidischen Sehnen eines Kreises als hyperbolische Geraden auffassen.

In Figur 8 ist in $y>0$ 3-mal der [3, 2] gezeichnet. Die Gesamtfigur stellt, da die Kreise genügend weit entfernt

Figur 8

gezeichnet sind, einen hyperbolischen [9, 3] dar. Ebenso gewinnt man für beliebiges m: [3m, 3]. Es bleibt also k bei wachsendem m konstant. Bisher war — von dem Fall (n, 1) abgesehen — mit $n \to \infty$ auch $k \to \infty$. Es war sogar $k > \sqrt{n}$, da nach (6) von Seite 34 $n < k^2$ war.

Man hat allgemein: Mit [n, k] und [n′, k] existiert auch [n + n′, k]. Wie in Figur 8 erhält man dies, indem man [n, k] und [n′, k] in $y>0$ genügend weit entfernt zeichnet.

Gehören aber [n, k] und [n′, k′] der Klasse c an*), so hat man: Zu je zwei hyperbolischen [n, k] bzw. [n′, k′] gibt es weiter die „Summe“ [n, k] + [n′, k′] = [n + n′, n + k′], die dieselbe Charakteristik hat wie die Summanden. Wie bisher erkennt man das, wenn man die „Geraden“ in einfachen Punkten zum Schnitt bringt. Daraus folgt, daß hier die Charakteristiken und n einen Komplex nicht mehr eindeutig bestimmen, da [2 · n, n + k] bzw. [2 · n, k] dieselben Charakteristiken besitzen wie [n, k]. Aus diesen Beziehungen kann man schließlich folgenden Satz herleiten:

Satz 10. Zu jedem $k > \gamma_1 > 0$ existiert eine positive nur von k abhängige Konstante $\gamma_2(k)$ so, daß für alle $n > \gamma_2$ das Symbol [n, k] durch einen hyperbolischen Geradenkomplex darstellbar ist.

*) Klasse c bedeutet wie früher den Wert $c = n - k - 1$.

Beweis: Nach Satz 17 von (S.G.I.) Seite 252 kann man in jeder Klasse c eine Konstante angeben so, daß in c für alle $n > \gamma_1''$ das Symbol (n, k) realisiert werden kann. Wegen $c = n - k - 1$, also $k = n - c - 1$, ist $(n, k) = (k + c + 1, k)$, sodaß es mithin für jedes k mit $k + c + 1 > \gamma_1''$, $k > \gamma_1'' - c - 1 = \gamma_1'$ einen Geradenkomplex des Symboles $(k + c + 1, k)$ gibt. Setzt man $c + 1 = c'$, so folgt dasselbe Ergebnis für $(k + c' + 1, k)$ mit $k > \gamma_2'$. Ist γ_1 die größere der Zahlen γ_1' bzw. γ_2', so gilt, daß für $k > \gamma_1$ sowohl $(k + c + 1, k)$ als auch $(k + c' + 1, k)$ realisierbar ist. Nach obigem folgt dasselbe dann für die hyperbolischen $[k + c + 1, k]$, $[k + c' + 1, k]$. Hier hat man sogar für $x \geq 0$, $y \geq 0$ die Komplexe

$$[(k + c + 1) \cdot x + (k + c' + 1) \cdot y, k].$$

Wegen der Teilerfremdheit von $k + c + 1$ bzw. $k + c' + 1 = k + c + 2$ stellt die Summe im Symbol für $x > 0$, $y > 0$ jede ganze Zahl $n > \gamma_2$ dar, wo γ_2 nur von k abhängig ist.

Anmerkung: Die erste Konstante γ_1 kann durch Bestimmung endlich vieler Klassen c angegeben werden. Durch Probieren habe ich für γ_1 den Näherungswert $\gamma_1 \leq 10$ gefunden.

2. Zusammenhängende Komplexe.

Auf einem Geradenkomplex (n, k) seien zwei Punkte P_1 und P_2 gegeben. Wir sagen nun, ein variabler Punkt P durchlaufe (n, k) von P_1 bis P_2, wenn P in der Ebene von (n, k) den Weg von P_1 nach P_2 längs der Geraden des Komplexes zurücklegt, ohne diesen dabei zu verlassen.

In dem Schnittpunkte zweier Geraden g_μ und g_ν kann P g_μ verlassen und unter Änderung seiner Richtung (n, k) längs g_ν durchlaufen. Es erweist sich jedoch für das Folgende zweckmäßig, festzusetzen, daß P eine Gerade g_μ nur an einem Kreuzungspunkte verlassen darf.

Wenn wir also in Figur 9 die Gerade g durchlaufen, können wir in P_3 die Richtung ändern, nicht aber in den einfachen Schnittpunkten P_1 und P_2.

Figur 9

P möge nun (n, k) von einem beliebigen Punkte aus durchlaufen. Es ist möglich, daß man dann zu allen Punkten von (n, k) gelangen kann. Wir nennen diesen dann zusammenhängend.

Definition IV. Ein symmetrischer Komplex heiße zusammenhängend, wenn man ihn von einem Punkte aus ganz durchlaufen kann.

Bildet man die Summe von zusammenhängenden Komplexen derselben Klasse, indem man die Geraden verschiedener Komplexe in einfachen Punkten zum Schnitt bringt, so erhält man offenbar keinen zusammenhängenden (n, k). Denn man kann von einem Punkte eines Summanden aus nur diesen durchlaufen, da man sonst eine seiner Geraden an einem einfachen Schnittpunkte verlassen müßte. Umgekehrt bilden alle n′ Geraden, die man von einem Punkte eines (n, k) aus durchlaufen kann, einen symmetrischen Teilkomplex (n′, k′) von (n, k). Denn die anderen $n - n'$ Geraden von (n, k) schneiden diese in einfachen Punkten. Wir nehmen diese $n - n'$ Geraden fort. Die Charakteristiken der Restgeraden haben sich nicht geändert, gehören also derselben Klasse an. Wir hatten ja auf ihnen nur einfache Schnittpunkte weggelassen.

Insbesondere ist also ein irreduzibler (n, k) zusammenhängend; denn er ist mit jedem seiner Teilkomplexe identisch. Dagegen gilt nicht die Umkehrung. Es kann sehr wohl ein reduzibler Komplex auch zusammenhängend sein. Das zeigt schon ein Beispiel von Seite 18 (Bemerkung 1). Dort hatte

man einen reduziblen inhomogenen Geradenkomplex, der nicht durch geometrische Addition aus seinen Summanden konstruiert war. Man prüft leicht nach, daß dieser Komplex zusammenhängend ist.

Betrachten wir jedoch zunächst homogene (n, k)! Hier zeige ich, daß bei der Parallelverschiebung ((S. G. I.) Seite 250) aus zusammenhängenden (n, k) wieder zusammenhängende Komplexe werden.

Verschiebe ich nämlich (n, k) etwa m-mal parallel, dann sind die Geraden zweier verschobener Geradenkomplexe durch die $(m-1)$-fachen Punkte im Unendlichen verbunden. Innerhalb eines Teilkomplexes aber war der Zusammenhang schon vorausgesetzt.

Nun erhielt man nach (S. G. I.) Seite 253, Satz 15 für die Charakteristik $\chi = (a_1, \ldots, a_s)$ in $a_1 \cdots a_s \cdot x = n$ eine Untermenge der Lösungsmenge $(x = 1, 2, \ldots)$.

Komplexe mit diesen n und der Charakteristik χ entstehen aus den $(a_1 \cdot a_2, k)$ der Charakteristik $\chi_1 = (a_1, a_2)$ durch $(s-2)$-mal ausgeübte Parallelverschiebung. Ich habe nach dem Vorhergehenden gezeigt, daß alle (n, k) mit diesen n zusammenhängend gestaltet werden können, sobald ich bewiesen habe, daß das bei Komplexen einer zweigliedrigen Charakteristik: $\chi_1 = (a_1, a_2)$ möglich ist.

(n, k) habe $\chi_1 = (a_1, a_2)$. Es ist $s_{a_1-1} = \frac{n}{a_1}$, $s_{a_2-1} = \frac{n}{a_2}$. Ich bestimme nun in der Ebene $\frac{n}{a_1}$ Punkte $P_1, \ldots, P_{\frac{n}{a_1}}$, ebenso $\frac{n}{a_2}$ Punkte $P'_1, \ldots, P'_{\frac{n}{a_2}}$. Dann verbinde ich je a_2 der P_ν mit $P'_1, \ldots, P'_{\frac{n}{a_2}}$ durch Geraden. Das sind genau $a_2 \cdot \frac{n}{a_2} = n$ Geraden. Ich habe (n, k) mit $\chi_1 = (a_1, a_2)$ schon konstruiert, wenn ich nur darauf achte, daß durch jeden

P_ν genau a_1 dieser n Geraden gehen und auch jede Gerade mit genau einem P_ν bzw. P'_μ inzident ist. Sonst ist aber die Wahl der a_2 mit P'_μ zu verbindenden P_ν beliebig, wenn man nur darauf achtet, daß außer den Punkten P_ν und P_μ keine neuen Kreuzungspunkte entstehen.

Zunächst verbinde ich nunmehr a_2 beliebige der P_ν mit P'_1; dann wähle ich die mit P'_2 zu verbindenden P_ρ so, daß einige von ihnen mit den vorhergehenden P_ν identisch sind. Ich kann das; durch jeden P'_ν gehen ja $a_1 > 1$ Geraden. So fahre ich fort. Immer verbinde ich $P'_{\rho+1}$ mit solchen P_σ, die schon z. T. bei P'_ρ bestimmt waren.

Ich habe noch zu zeigen, daß bei dieser Anordnung (n, k) zusammenhängend wird. Ich kann beim Durchlaufen des Komplexes von einer Geraden g durch P'_1 zu einer mit P'_2 inzidenten g′ etwa so gelangen:

Längs g kommt man zu dem Kreuzungspunkt P'_1. Von hier verfolge ich die Gerade, die zu einem P_σ führt, der auch mit P'_2 verbunden ist. Längs dieser Verbindungsgeraden gelange ich dann zu P'_2, der mit g′ inzident ist. Auf diese Weise kann ich jede Gerade erreichen. Mithin ist (n, k) zusammenhängend.

Damit ist für eine große Anzahl symmetrischer Geradenkomplexe der Zusammenhang nachgewiesen. Wenn man beachtet, daß ein (n, k) mit $n = a_1 \cdot a_2 \cdots a_s \cdot x$ auch aus $(a_1 \cdots a_s, k')$ durch x-malige Addition entsteht, erkennt man überdies, daß die Mehrzahl reduzibel ist.

Auch bei inhomogenen Komplexen kommt es vor, daß reduzible zusammenhängend sind, wie das Beispiel von Seite 18 zeigt. Man erkennt aber sofort, daß ein inhomogener (n, k) nur dann zusammenhängend sein kann, wenn das System (A) seiner Charakteristiken „zusammenhängend“ ist (s. Seite 10).

Diese Betrachtungen zeigen, wie schon früher bemerkt wurde, daß aus einer speziellen Figur die Irreduzibilität eines Komplexes nicht hervorgeht.

Bei den reduziblen (n, k) bleibt der Zusammenhang bei Transformationen, die gleiche Komplexe in gleiche überführen, nicht bestehen.

Es bleibt deshalb das bemerkenswerte Charakteristikum der irreduziblen Komplexe, daß sie bei allen solchen Transformationen zusammenhängend bleiben.

Lebenslauf.

Am 9. August 1907 wurde ich in Niederbiel bei Wetzlar als Sohn des Hauptlehrers Jung und seiner Ehefrau Johannette geb. Korz geboren. Nach dem Besuch der Volksschule trat ich Ostern 1921 in das Staatliche Goethegymnasium zu Wetzlar ein. Als ich hier die Reifeprüfung abgelegt hatte, studierte ich Mathematik und Naturwissenschaften an den Universitäten Gießen, Leipzig, Marburg und Göttingen. In Gießen hörte ich u. a. die Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung bei Prof. Engel, bzw. Algebra (Galoissche Theorie) bei Prof. Falkenberg. In Leipzig interessierten mich besonders die Vorlesungen über Funktionentheorie (Prof. Koebe), elliptische Funktionen (Prof. O. Hölder) und die zahlentheoretischen Vorlesungen von Prof. van der Waerden. Zum Abschluß meines Studiums besuchte ich die Universität Berlin und wurde hier Ostern 1936 immatrikuliert. Für die wertvollen Anregungen und Ratschläge, die ich hier durch Herrn Prof. Dr. Bieberbach und Herrn Dozenten Dr. Weber erhielt, spreche ich diesen meinen aufrichtigen Dank aus.